## Модален анализ :: Какво е и какво не е

Какво представлява модалният анализ? Какви отговори получаваме от него? За какво е полезен? Какво не ни казва?

Тук ще обсъдим откъде идва модалният анализ, какво е и до известна степен това, което не е. Също така ще обсъдим защо го правим, какво извличаме от него и как да го използваме.

За да отговорите на тези въпроси, първо трябва да вникнем в математиката на динамичните системи (което, не е за всеки вкус ☺ ).

### Проблема със собствените стойности

В този раздел ще извлечем уравнението, използвано за решаване на формите и честотите на модите. В този процес ще се опитаме да опишем и причините (математически).
Използваното в МКЕ дискретно динамично уравнение е следното:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{F\},$$

където [M] е масовата матрица; [C] е матрицата на демпфирането, [K] е матрицата на коравината. И трите матрици са константни в линейната динамика; $\{\ddot{u}\}$, $\{\dot{u}\}$ и $\{u\}$ са съответно векторите на ускорението, скоростта и преместването.
Ако пренебрегнем за момент депфирането, то за дискретно динамично уравнение получаваме:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{F\}$$

Можем да пренебрегнем демпфирането на голяма част от проблемите, защото количеството демпфиране за повечето структури е доста под 10%, което означава бавно затихване на вибрациите в системата.
Да приемем, че векторите $\{\ddot{u}\}_1$ и $\{u\}_1$, са решение на динамичното уравнение, така че:

$$[M]\{\ddot{u}\}_1+[K]\{u\}_1=\{F\}$$

Да приемем, че имаме и втори набор от вектори $\{\ddot{u}\}_2$ и $\{u\}_2$, при които:

$$[M]\{\ddot{u}\}_2+[K]\{u\}_2=\{0\}$$

След това, сумирането на двете уравнения дава:

$$[M]\{\ddot{u}\}_1+[M]\{\ddot{u}\}_2+[K]\{u\}_1+[K]\{u\}_2=\{F\}+\{0\}$$

Това може да бъде записано като:

$$[M](\{\ddot{u}\}_1+\ddot{u}\}_2)+[K](\{u\}_1+\{u\}_2)=\{F\}$$

С други думи, $(\{\ddot{u}\}_1+\{\ddot{u}\}_2)$ и $(\{u\}_1+\{u\}_2)$ също са валидно решение на динамичното уравнение. Когато $\{\ddot{u}\}_2$ и $\{u\}_2$ са нула, очевидно няма проблем. Това се нарича тривиално решение.
От друга страна, ако има ненулев набор вектори $\{\ddot{u}\}_2$ и $\{u\}_2$, тогава съществуват множество възможни решения на динамичното уравнение. Както се оказа, съществуват множество решения на динамичното уравнение. Само едно от решенията е валидно - първоначалните условия определят кое.
Решения на уравнението $[M]\{\ddot{u}\}+[K]\{u\}=\{0\}$ има формата:

$$\{u\}(t)=\{U\}e^{i\omega t}$$

$$\{\ddot{u}\}(t)=-\omega^2\{U\}e^{i\omega t}$$

Където $\{U\}$ е константен вектор, а $e^{i\omega t}$ представлява времевата реакция, която е проста синусоидална вълна. А $\boldsymbol{\omega}$ е ъгловата скорост на синусоидалната вълна. $\{\ddot{u}\}(t)$ е двойно диференциране на $\{u\}(t)$.
Използвайки това, получаваме:

$$-\omega^2[M]\{U\}e^{i\omega t}+[K]\{U\}e^{i\omega t}=\{0\} \quad / e^{i\omega t} \quad \Rightarrow \quad ([K]-\omega^2[M])\{U\}=\{0\}$$

Където $\omega^2$ е собствената стойност и $\{U\}$ собствения вектор. Обсъждането на решаването на това уравнение е несъществено в контекста на тази статия.
Решението на това уравнение е векторът $\{U\}$ със съответната честота $\omega$.

## Последиците от реалния проблем със собствените стойности

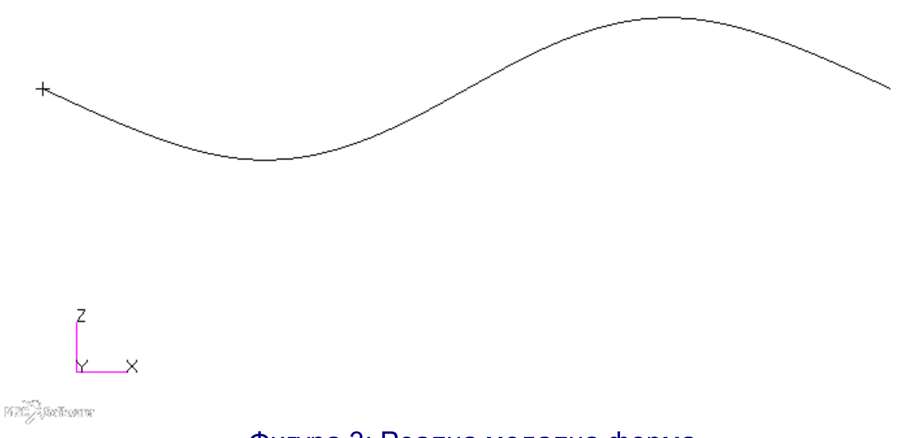
Връщайки се назад: Опитваме се да получим нетривиални решения (т.е. $\{U\}$ не е нулев вектор) на предишното уравнение. Ако матрицата $([K]-\omega^2[M])$ е положително определена (наричана още несингулярна или обратима), тогава единственото решение за $\{U\}$ е тривиалното решение. Единственият начин да се постигне нетривиално решение е да се избере стойност за $\omega^2$, която ще направи $([K]-\omega^2[M])$ сингулярна. След като намерим такава стойност за $\omega^2$, следващата стъпка е да намерим съответния вектор $\{U\}$, който съответства на $\omega^2$. Ако ние мащабираме $\{U\}$ по някакво реално число, мащабирания вектор $\{U\}$ ще е решение на проблема със собствените стойности.

По тази причина е по-удобно да се мисли за $\{U\}$ като "форма". Точно поради това се нарича "модална форма". Формата на структурата се колебае с честота $\omega$. Споменато с по-малко технически термини: Ако деформираме структурата статично в модална форма, след това я освободим, тя ще се колебае между първоначалната деформирана форма и отрицателната стойност на първоначалната деформирана форма при честота $\omega$. Вярно - с течение на времето тя ще затихва, но при ниски нива на демпфиране амплитудата бавно ще намалее.

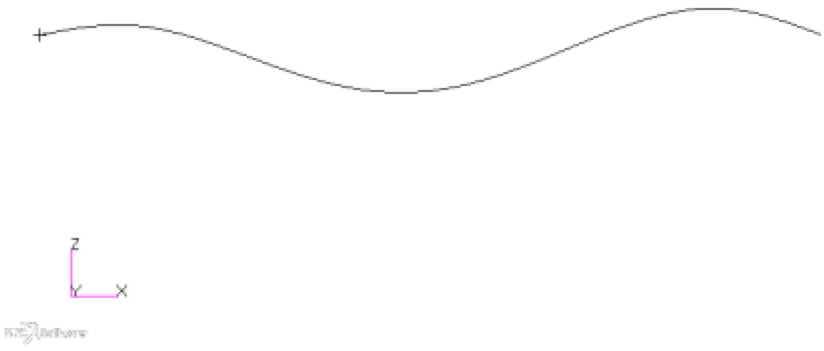
Друг важен момент, който трябва да се запомни, е, че има няколко моди на структурата. Всяка модална форма се получава при много специфична честота, наречена собствена честота на дадената мода. Възможно е структурата да има множество моди при същата честота. Пример за това е лъч със симетрично напречно сечение, захванат в единия край: Първите две модални форми на огъване ще бъдат с еднаква честота. Модалната форма обаче ще бъде в различни равнини.

Обърнете внимание също така, че тъй като нашата система е линейна, принципа на суперпозиция е в сила: Поведението на всяка мода може да бъде решено отделно. Общото изместване, което се дължи на всички налични моди, ще бъде сумата от резултатите, на всяка мода. Всяка модална форма се колебае при собствената честота на тази мода. С други думи, в резултатите ще бъдат представени многобройни моди, всеки със своята собствената честота.

Накрая, тъй като проблемът със собствените стойности има само реални стойности във всички матрици и константи, векторът на преместването на модалната форма също е реален. Реалната модална форма предполага, че движението на всички места в модела на крайните елементи е перфектно във фаза (0° относителна фаза) или перфектно дефазиран (180° относителна фаза).




Фигура 3: Реална модална форма.
Всяко движение е във фаза или дефазирано с 180 °




Фигура 2: Сложна модална форма.
Всяко местоположение може да има различен фазов ъгъл

## Какво е модата

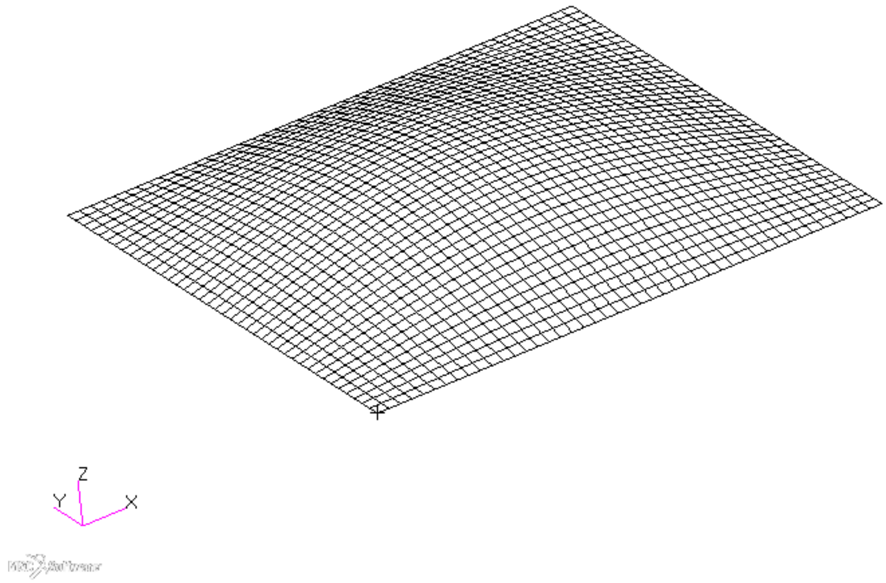
Модата е комбинация от деформирана форма, в която структурата непрекъснато ще обменя кинетична енергия и енергията на деформация със собствената честота, при която се получава модалната форма. Ако има само една мода:

- В не-деформирано състояние скоростта във всяка точка ще бъде максимална. В този момент кинетичната енергия е на върха си и енергията на деформация е нула
- При максимално деформирано състояние, моментната скорост е нула. Кинетичната енергия в тази точка е нула, докато енергийното напрежение е максимално

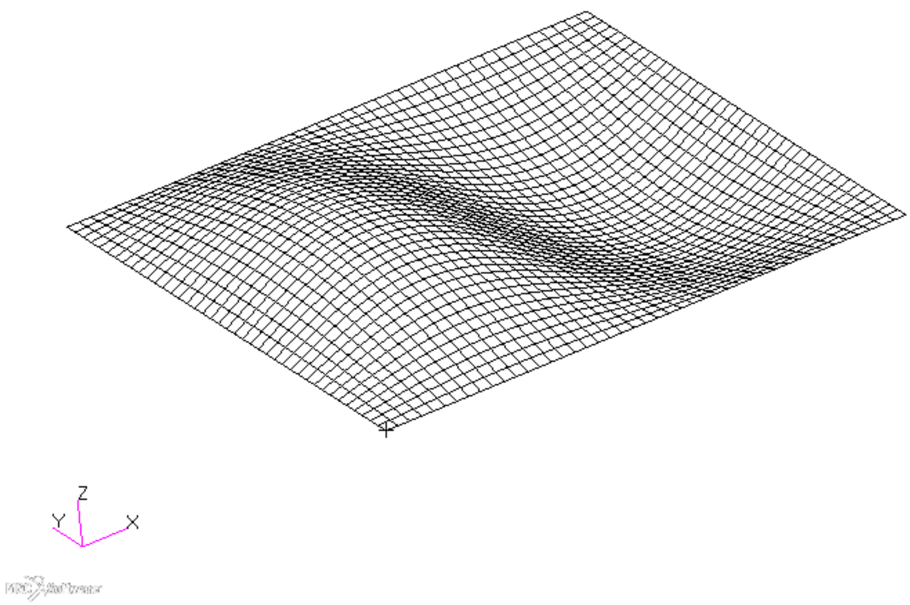
Казано по друг начин: Ако деформираме структурата в някоя от формите й и я освободим, тя ще се движи непрекъснато от първоначалната форма до негативната на първоначалната форма и обратно и при собствената честота на въпросната мода.

Не забравяйте, че (без демпфиране) се нуждаем от нулево външно натоварване, за да запазим трептенията при постоянна амплитуда. Следователно натоварването, приложено при собствената честота на модата, би довело до допълнително движение на модата, което ще увеличи нивото на трептене. Цялата налична от товара енергия се поглъща в структурата. Ако няма демпфиране, трептенето ще нарасне до безкрайност или по-скоро до провал. С демпфиране, трептенето ще нарасне до точката, където демпфиране ще премахне точно същото количество енергия от системата, колкото количеството енергия, която се добавя от възбуждащия товар. Това може (и често води) до неуспех поради сравнително големите колебания, които могат да се получат от относително малка възбуждаща сила.

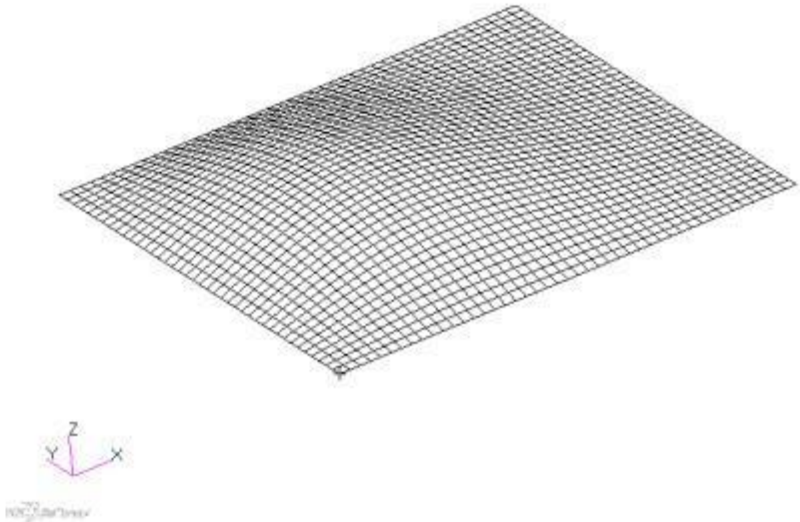
Ако структурата се деформира в линейна комбинация от модалните форми и се освободи, всяка форма ще присъства в получената деформация във времето. Освен това, всяка форма все още ще се колебае със своята собствена честота. По-долу е даден пример за две модални форми, анимирани във времето, както и комбинацията от двете.




Фигура 3: Мода 1, 21.9Hz




Фигура 4: Мода 2, 51.5Hz




Фигура 5: Комбинация от мода 1 (21.9Hz) и мода 2 (51.5Hz)

В обобщение:

- Модата е форма със съответна собствена честота, при която конструкцията ще абсорбира цялата налична енергия, доставяна от възбуждане
- Модата е свойство на структура, тъй като се изчислява без натоварване върху структурата

## Какво не е модата

Както вече споменахме, модата има форма, а не преместване. С това имаме предвид, че величината на модалната форма е произволна. Горепосоченото обаче не е цялата истина - съществуват редица стандартни начини за мащабиране на модите. Въпреки това, това все още е мащабен фактор, избран по математически причини, а не да се опитва да представлява нещо реално за модела. Така че от тази гледна точка мащабният фактор за всяка мода е произволен.

Има проблем с модалната форма: Формата изглежда като преместване. В края на краищата, както векторът на преместване, така и векторът на формата означават деформация на структурата. Това означава, че е напълно възможно с решаване на крайни елементи да се изчислят всички стандартни резултати за модалната форма. С други думи, можем да поискаме напрежение или деформация за всяка мода. Те трябва да се наричат форми на напрежение или деформация, тъй като те съответстват на модалната форма.

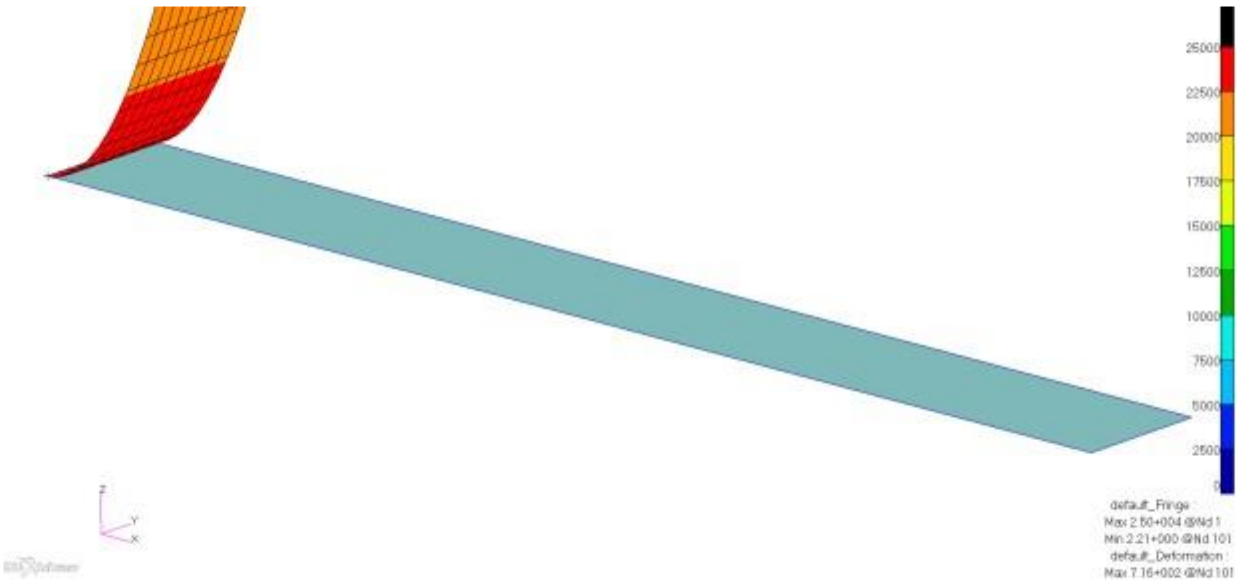
Тези стойности обаче са безполезни. *Изчакайте. Какво?!?* Да, стойностите са почти безполезни. Разбира се, разпределението е полезно, дори ако стойностите са безполезни. За да разберете защо: Модата е форма, а не деформация. Ако искате, помислете за това като заместване с случайно прилаган мащаб. Деформацията, отчетена за всяка мода, ще бъде напрежението, което ще получите, ако изменението на структурата е точно същото като това на формата на преместване.

Помислете за това по следния начин: Ако максималното напрежение е 9 MPa, каква е състоянието на напрежение на модела? Още не знаем - все още не сме приложили никакви натоварвания, така че защо да знаем какво е напрежението в структурата? Нивото на напрежение би достигнало тази стойност, ако (и само ако) деформираме структурата до точното ниво на деформация, изчислено от формата, но мащабният коефициент за модата е произволен.

Както бе споменато, разпределението на напрежението е правилно, дори ако точните стойности са безсмислени. Нуждаем се само от една точка за измерване, за да открием поведението на цялата структура, ако тя се колебае само с една честота.

Да използваме пример, за да илюстрираме това. На фигура 6 имаме диаграмата на напрежението на първа мода на структура. Забележете, че пиковото напрежение е 25 GPa. Съответната деформация е 716 мм. Обърнете внимание на прекомерната деформация поради произволния мащабен фактор, приложен при решението.

Ако реалната структура се колебае при тази първа мода и ние измерваме върхната деформация да бъде 1 mm (вместо 716), ние трябва да мащабираме както деформацията, така и напрежението с 1/716. Това води до максимално напрежение от 34.9 MPa и разпределение на напрежението (и разпределение на преместването), както е показано на фигура 7.




Фигура 6: Диаграмата на напрежението на първа мода на структура. Максималното пиковото напрежение е 25 GPa. Максималната деформация е 716 мм.

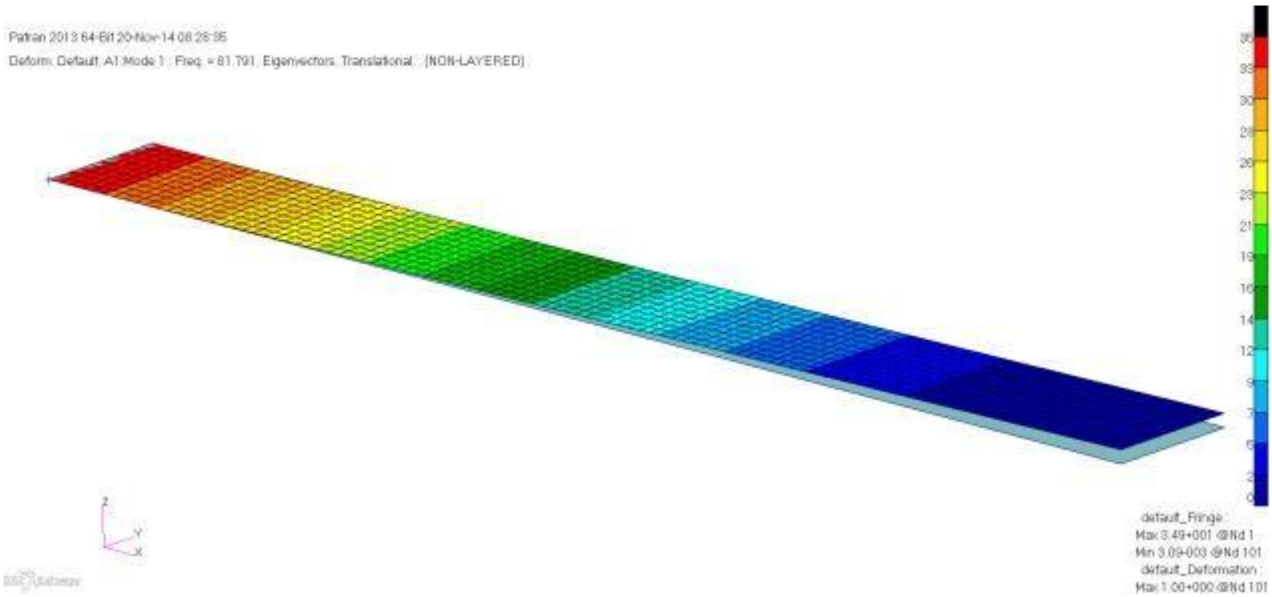



Figure 7: Преместването и напрежението мащабирани спрямо актуалната деформация според измерванията

В обобщение:

- Модата не е изместване при определена собствена честота - а по-скоро форма
- Модата не е структурната реакция, дължаща се на натоварването на входа, тъй като се изчислява без товар
- Резултатите от модалния анализ, като изместване, деформация, напрежение и скорост, не са представителни за напрежението в структурата при динамично натоварване: Това е така, защото относителните стойности между две (или повече) точки в структурата имат значение, а не цифровите стойности на някой от резултатите.

## За какво се използва модалният анализ?

И накрая, време да станем практични. Целта на един модален анализ е да се намерят формите и честотите, при които структурата ще усили ефекта на натоварването. В този раздел ще посочим някои примери за това, защо може да ни е необходима тази информация и как да я използваме.

### Намиране на разхлабени компоненти

При статичен анализ структурата трябва да бъде ограничена по такъв начин, че всяко натоварване в която и да е посока да противодейства на силата или момента на реакцията. Ако структурата е недостатъчно ограничена, статичен анализ ще съобщи за грешка. Причините за недостатъчно ограничение могат да бъдат всичко от липсващото ограничение до това да имаш част, която не е прикрепена към останалата част от структурата.

Намирането на тези проблеми е лесно с модален анализ: Анализът ще отчита мода с 0 Hz (т.е. статична) за всяка неограничена посока. Тя няма да бъдат точно 0 Hz поради две причини: Численото закръгляване по време на решение на процеса може да причини много ниска коравина на земята, а също и защото решението на собствените стойности е итеративен процес. Честотите ще са много ниски - обикновено значително по-малки от 0.001 Hz. Тези моди с нулеви честоти често се наричат "rigid-bodymodes" или "free-strain modes". Това е така, защото структурата (или част от структурата) се премества или се върти по такъв начин, че да няма напрежение/деформация. С други думи, тя се движи в някаква посока, сякаш е твърда.

Формата на изместване за тези режими трябва да осигурява достатъчно информация кой компонент (и) може да бъде освободен/разхлабен или кои ограничения липсват.

Ако един компонент няма ограничения, моделът ще има шест режима на твърда тяло. Те съответстват на компонента, премествания съответно в X, Y и Z и въртящи се около X, Y и Z. Забележете, че модите е малко вероятно да бъдат приведени в съответствие с глобалната координатна система като линейна комбинация от твърди тела на тялото също е валидна като твърда мода на тялото.

### Намирането на опасни скорости на въртене

Ако имаме структура, която се върти, всяка небалансирана маса ще предизвика синусоидално натоварване. Ако това съвпада с естествена честота, ще се получи прекомерно движение.

За да бъдем честни, е необходимо разширение на динамичните уравнения, ако искаме да погледнем на въртящите се валове, тъй като това започва да бъде част от роторната динамика. В динамиката на ротора естествените честоти са функция на скоростта, в която се върти.

От друга страна, ако искаме да погледнем лопатките, прикрепени към вала, или товарът, прехвърлен върху корпуса при скорости доста под първа мода на роторно-динамичен вал, тогава трябва да извършим модален анализ на лопатките или корпуса, за да намерим скоростите на ротора, които съответстват на собствените честоти.

Понякога сме принудени да работим с вал със скорост над първата (или дори по-късен) мода на конструкцията. Ако бавно въртим вала, тази мода (или модите) ще бъде възбудени значително. С бавно ускорявайки се до точка малко преди модата, след което бързо се ускорява до скорост, по-висока от модата, тази мода няма да има време да достигне стабилно състояние. Това драстично ще намали нивото на вибрациите.

### Намиране къде да се ограничи или натовари структурата

Тъй като реалните структури имат потискане, вълнуващите ги по своята естествена честота ще достигнат стабилно състояние. Надяваме се, че стойността на равновесното състояние е доста преди провала.

Ако приложим известна сила при естествена честота, мястото, където я прилагаме, ще определи максималното преместване на режима. Ако го приложим към точката на максимално движение в посоката на приложеното натоварване, количеството енергия, което можем да добавим в цикъл, е значително по-голямо, отколкото ако го приложим към точка с по-малко движение. Това ще доведе до по-висока амплитуда на движение за същото ниво на възбуждане.

Ако можем да я приложим към точка от модела, която има нулево движение за даден режим, няма да се добави никаква енергия, дори ако сме възбудили модата. Такива точки се наричат "възли" на дадена мода.

Докато звучи страхотно, възлите в действителност ще бъдат на различни места за различни моди. Намирането на място, където преместването е относително малко за всички моди, е по-добър избор от възел за конкретна мода.

### Намиране как се мести модата

Ако имаме мода в неудобна честота, може да се наложи да променим модата (или по-скоро честотата на модата). Честотата може да бъде увеличена или намалена въз основа на изискванията на структурата.

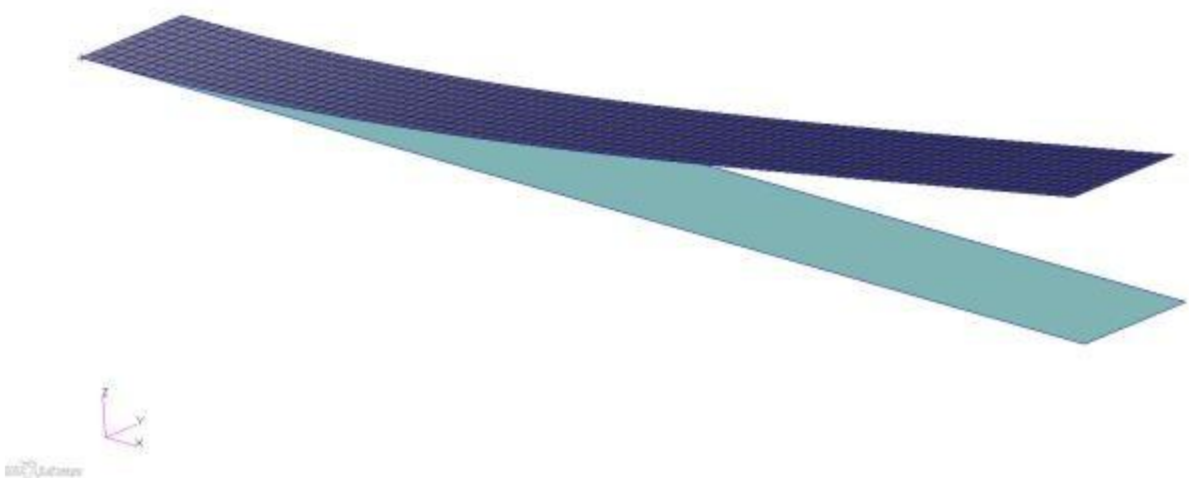
За пружина маса с една степен на свобода, собствената честота $n$ е равно на $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$ с $k$ означаваме пружинената коравина, а с $m$ масата. Увеличаването на собствената честота изисква увеличение на $k$ или намаляване до $m$.

Има някои инструменти, които да ни помогнат да намерим мястото, където трябва да увеличим коравината или да намалим масата:

- Местоположението (местата) с най-висока енергийна плътност е най-голямото въздействие върху коравината за тази мода. При добавянето на коравина в тези места в посоката, в която е най-голямото напрежение, ще се добави най-голямата коравина с най-малко количество маса.
- Местоположенията с максимална плътност на кинетичната енергия са тези, при които промяната на масата ще има най-голям ефект.

За редица модални форми, разположението на максималната енергийна плътност на напрежението и максималната плътност на кинетичната енергия се различава. За тях добавянето на коравина или намаляване на масата е сравнително лесно.

В случаите, когато те съвпадат, трябва да добавим твърдост значително по-бързо от масата. Пример за това как може да се постигне това е както следва: За режим на огъване на плоска плоча от първа линия (виж фигура 8 по-долу) удвояването на дебелината на плочата ще удвои масата, но ще увеличи инерцията на напречното сечение твърдостта на огъване) до третото захранване. Друг подход би бил добавянето на диагонално ребро към плочата, тъй като би добавило по-малко тегло към плочата, като добави още по-голяма огъваща скованост, отколкото просто увеличаване на дебелината.



Фигура 8: Първи режим на огъване. Деформацията се мащабира в постпроцесора, за да може по-лесно да се визуализира

Забележете също, че чрез сравняване на различните моди често е възможно селективно да се променят честотите на модите чрез добавяне на материал към места, които значително ще заздравят само конкретните модални форми.

**Модална динамика (класическа динамика)**

Модалните методи са начин за драстично намаляване на броя на степените на свобода, решени в линейната динамика. Обсъждането на сложността на модалната динамика е извън обхвата на тази статия. Накратко, тя превръща пълната динамична система в система, която позволява само движение, което е линейна комбинация от формите на режима, използвани в опростяването. Вместо да решават за всяка степен на свобода като функция на времето, модалните методи намират всяка мода в мащаб като функция от времето.

С други думи, решаваме приблизителен модел. Като приближение, това е най-вероятно най-ефективното приближение по отношение на точността спрямо времето за решение за големи модели.

## Заключение

Почти всички типове анализ решават някаква форма на реакция при някакъв вид натоварване. Модалният анализ е доста уникален в това отношение поради следните причини:

- Модалният анализ решава уравнение, за което няма приложено натоварване
- Модалният анализ ни дава конкретна информация за характеристиките на структурата, вместо да докладваме за реакция

Модален анализ ни казва, на каква честота структурата ще поеме цялата енергия, приложена към нея, и каква е формата, която съответства на тази честота.

Макар това да ни казва много малко, има разнообразни приложения за модален анализ, вариращ от намиране на грешки в моделите до предоставяне на информация как да се промени структурата, за да се мести модата.

Намирането на това как структурата ще реагира изисква друг вид анализ - Тема за друго време.